NOTATIONS ET RAPPELS

On désigne par $\mathbf{Z}$ l'anneau des entiers, par $\mathbf{R}$ le corps des nombres réels, par $\mathbf{C}$ celui des nombres complexes.
Si n est un entier $\geqslant 1$, $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ désigne l'ensemble des matrices réelles de taille n, $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ celui des matrices complexes de taille n, $GL_n(\mathbf{R})$ le groupe des matrices réelles de taille n inversibles, $GL_n(\mathbf{C})$ le groupe des matrices complexes de taille n inversibles, $SL_n(\mathbf{R})$ le groupe des matrices réelles de taille n de déterminant 1.

Si A est une matrice réelle ou complexe, on note $\mathrm{Tr}(A)$ sa trace, $\det(A)$ son déterminant et ${}^tA$ sa matrice transposée. Si A est une matrice complexe, on note A^* sa matrice adjointe. On désigne par I la matrice identité et aussi, par abus de notation, l'application linéaire identité.

On munit $\mathbf{R}^n$ de la structure euclidienne standard : si $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^n$, $\|x\| = (\sum_{i=1}^n x_i^2)^{1/2}$, et $\mathbf{C}^n$ de la structure hermitienne standard : si $z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \in \mathbf{C}^n$, $\|z\| = (\sum_{i=1}^n |z_i|^2)^{1/2}$.

Les espaces $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ et $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ sont alors munis des normes matricielles associées :
pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, $\|M\| = sup_{\|x\|=1}\|M(x)\|$, où $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, et, dans le membre de droite, $\|.\|$ désigne la norme euclidienne ou hermitienne selon le cas.

On considèrera dans certaines questions $\mathbf{R}^n$ muni de sa structure d'espace affine. Si $\varphi : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ est une application affine, on désigne sa partie linéaire par A_φ, et par M_φ la matrice de A_φ dans la base canonique de $\mathbf{R}^n$.
On désigne par $GA_n(\mathbf{R})$ le groupe des applications affines bijectives de $\mathbf{R}^n$, et $SA_n(\mathbf{R})$ son sous-groupe des applications affines dont la partie linéaire est de déterminant 1.

La première partie rassemble divers résultats préliminaires utilisés dans les autres parties ; les différentes questions de cette partie, à part les questions 1. et 2., sont indépendantes. La partie V est indépendante des parties II, III et IV.

Partie I

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. Soit $F : \mathbf{R} \to GL_n(\mathbf{C})$ une application de classe C^1 telle que :
$\forall t \in \mathbf{R}, \quad F'(t) = AF(t)$ et $F(0) = I$. Démontrer que $\quad \forall t \in \mathbf{R}, \quad F(t) = \exp(tA)$. (On pourra dériver la fonction : $t \mapsto exp(-tA)F(t)$.)
2. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ telles que $AB = BA$. Démontrer que $\exp(A + B) = \exp(A)\exp(B)$. (On pourra utiliser la question 1).
3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. Démontrer que $\det(\exp(A)) = e^{\mathrm{Tr}(A)}$.
4. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Démontrer que sa norme, lorsqu'on la voit comme élément de $M_n(\mathbf{C})$, est égale à sa norme comme élément de $M_n(\mathbf{R})$. (On pourra observer, en le justifiant, que si $x \in \mathbf{C}^n$ est écrit sous la forme $x = x_1 + ix_2$ avec $x_1, x_2 \in \mathbf{R}^n$ alors $\|x\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2$.)
5. Démontrer que l'application $\tau : GA_n(\mathbf{R}) \to GL_{n+1}(\mathbf{R})$ donnée par : $\tau(\varphi) = \begin{pmatrix} M_\varphi & \varphi(0) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ définit un morphisme injectif de groupes.

Tournez la page S.V.P.

6. Soit $\varphi : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ une application affine. Démontrer que φ possède un unique point fixe si et seulement si l'application linéaire $A_\varphi - I$ est bijective.

7. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, non nulle, avec $\mathrm{Tr}(A) = 0$.

   (a) Démontrer qu' il existe $x \in \mathbf{C}^n$ tel que x et Ax sont linéairement indépendants.

   (b) Démontrer qu'il existe $P \in GL_n(\mathbf{C})$ telle que PAP^{-1} soit une matrice dont tous les termes diagonaux sont nuls. (On pourra procéder par récurrence sur n).

   (c) On suppose que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Démontrer qu'il existe une matrice P comme dans (b) ci-dessus avec $P \in SL_n(\mathbf{R})$.

   (d) On considère le cas $n = 2$. Soit $B \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ avec $\mathrm{Tr}(B) = 0$. Démontrer qu'il existe $Q \in SL_2(\mathbf{R})$ telle que QBQ^{-1} soit égale à une matrice de l'une des formes suivantes : $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha & 0 \end{pmatrix}$, où $\alpha \in \mathbf{R}$.

Partie II

On considère la boule ouverte $B = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}); \|M - I\| < 1\}$.

8. Soit $g \in B$, et $\lambda \in \mathbf{C}$ une valeur propre complexe de g. Démontrer que : $|\lambda - 1| < 1$. En déduire que B est contenue dans $GL_n(\mathbf{R})$.

9. Soit $G \subset GL_n(\mathbf{R})$ un sous-groupe de $GL_n(\mathbf{R})$ contenu dans la boule ouverte B, et $g \in G$.

   (a) Démontrer que g possède une unique valeur propre complexe, égale à 1. (On pourra considérer les puissances $g^k, k \in \mathbf{Z}$, de g).

   (b) Démontrer qu'il existe une matrice nilpotente $N \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ telle que $g = I + N$.

   (c) Démontrer que $g = I$.

Partie III

On appelle sous-groupe à un paramètre de $GL_n(\mathbf{R})$ une application continue $\varphi : \mathbf{R} \to GL_n(\mathbf{R})$ telle que : $\forall s, t \in \mathbf{R} \quad \varphi(s + t) = \varphi(s)\varphi(t)$.
Soit $\varphi : \mathbf{R} \to GL_n(\mathbf{R})$ une telle application.

$\varphi(s) = \varphi(s-t)\varphi(t)$

10. Que vaut $\varphi(0)$?

11. On suppose que, de plus, φ est de classe C^1. Démontrer que : $\forall t \in \mathbf{R}$, $\varphi'(t) = \varphi'(0)\varphi(t)$. En déduire la forme des sous-groupes à un paramètre de $GL_n(\mathbf{R})$ qui sont de classe C^1.

12. On revient au cas général. On pose $\Psi(t) = \int_0^t \varphi(u)du$

    (a) Démontrer que : $\forall s, t \in \mathbf{R}, \quad \Psi(s + t) = \Psi(s) + \varphi(s)\Psi(t)$.

    (b) Démontrer qu'il existe $r > 0$ tel que : $\forall t \in]0, r[$, $\Psi(t)$ est inversible.

    (c) Conclure.

13. On suppose dans cette question que φ est à valeurs dans $SL_2(\mathbf{R})$. Soit $x \in \mathbf{R}^2$ un vecteur non nul. Démontrer que l'orbite $\{\varphi(t)x, t \in \mathbf{R}\}$ de x est soit un point, soit une demi-droite, soit une droite, soit une ellipse, soit un arc d'hyperbole.

Partie IV

On rappelle que $SA_2(\mathbf{R})$ est le groupe des applications affines bijectives de $\mathbf{R}^2$ dans lui-même, dont la partie linéaire est de déterminant 1. L'application τ de la question 5 identifie $SA_2(\mathbf{R})$ à un sous-groupe de $GL_3(\mathbf{R})$.
Soit $\varphi : \mathbf{R} \to SA_2(\mathbf{R})$ un morphisme de groupes. On dit que φ est continu, respectivement de classe C^1, si l'application $\tau \circ \varphi$ l'est.

Cette partie étudie les morphismes de groupes continus $\varphi : \mathbf{R} \to SA_2(\mathbf{R})$.

Soit $\varphi : \mathbf{R} \to SA_2(\mathbf{R})$ un tel morphisme.

14. Démontrer que φ est de classe C^1.
15. (a) Démontrer que s'il existe $t \in \mathbf{R}$ tel que $\varphi(t)$ possède un unique point fixe M, alors M est point fixe de tous les $\varphi(s)$, $\forall s \in \mathbf{R}$.
    (b) Déterminer dans ce cas la nature des orbites $\{\varphi(s)x, s \in \mathbf{R}\}$ des éléments de $\mathbf{R}^2$.
16. On suppose que $\forall t, \varphi(t)$ est une translation. Expliciter la forme de $\varphi(t)$ et déterminer la nature des orbites $\{\varphi(t)x, t \in \mathbf{R}\}$ des éléments de $\mathbf{R}^2$.
17. On suppose que l'on n'est dans aucune des situations des questions 15 ou 16 ci-dessus. On appelle $A(t)$ la partie linéaire de $\varphi(t)$.
    (a) Démontrer qu'il existe $P \in SL_2(\mathbf{R})$ tel que $\forall t \in \mathbf{R}, PA(t)P^{-1}$ soit égal à $\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} 1 & -t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

    Ainsi, dans un repère convenable, $\forall t \in \mathbf{R}, \varphi(t)$ s' écrit :
    $\forall \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2, \quad \varphi(t) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + \epsilon t x_2 + u(t) \\ x_2 + v(t) \end{pmatrix}$, avec $\epsilon = 1$ ou $\epsilon = -1$.
    (b) Démontrer que : $\forall t, s \in \mathbf{R}, v(t+s) = v(t) + v(s)$. En déduire qu'il existe $\gamma \in \mathbf{R}$ tel que : $\forall t \in \mathbf{R}, v(t) = \gamma t$.
    (c) Démontrer que : $\forall t, s \in \mathbf{R}, u(t+s) = u(t) + u(s) + \epsilon s t \gamma$. En déduire la forme de $u(t)$.
    (d) Déterminer la nature des orbites $\{\varphi(t)x, t \in \mathbf{R}\}$ des éléments de $\mathbf{R}^2$.

Partie V

18. Dans chacun des cas suivants, démontrer que G est connexe par arcs (pour le cas (c), on pourra diagonaliser l'élément considéré, et s'inspirer de cette situation pour le cas $G = SO_n(\mathbf{R})$.)
    (a) $G = SL_n(\mathbf{R})$
    (b) $G = SO_n(\mathbf{R})$
    (c) $G = SU_n(\mathbf{C})$.

19. Si G est l'un des groupes de la question précédente, on considère l'ensemble

$$\mathcal{G} = \{X \in M_n(\mathbf{K}), \forall t \in \mathbf{R}, \exp(tX) \in G\}$$

avec $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ dans les cas (a) et (b), et $\mathbf{K} = \mathbf{C}$ dans le cas (c).

Démontrer que :

(a) Si $G = SL_n(\mathbf{R})$, $\mathcal{G} = \{X \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}); \mathrm{Tr}\,(X) = 0\}$

(b) Si $G = SO_n(\mathbf{R})$, $\mathcal{G} = \{X \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}); \quad {}^tX = -X\}$

(c) Si $G = SU_n(\mathbf{C})$, $\mathcal{G} = \{X \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C}); \quad X^* = -X, \mathrm{Tr}\,(X) = 0\}$

On observe que, dans chacun de ces cas, $\mathcal{G}$ est un $\mathbf{R}$ espace vectoriel.

20. L'application exponentielle envoie $\mathcal{G}$ dans G. Démontrer, dans chacun des cas (b) et (c) ci-dessus, que cette application est surjective. (Pour $G = SU_n(\mathbf{C})$, on pourra diagonaliser l'élément considéré, et s'inspirer de cette situation pour le cas $G = SO_n(\mathbf{R})$.)

Dans les questions 21 et 22, on suppose que G est l'un des groupes de la question 18. Il est possible, et recommandé, de donner des démonstrations uniformes (i.e. d'éviter de les traiter au cas par cas).

21. **(a)** Soit $g \in G$ et $X \in \mathcal{G}$. Démontrer que $gXg^{-1} \in \mathcal{G}$, et que l'application $G \times \mathcal{G} \to \mathcal{G}$, $(g, X) \mapsto gXg^{-1}$ définit une action de G sur $\mathcal{G}$ par automorphismes linéaires.

(b) Soient $X, Y \in \mathcal{G}$. Démontrer que $XY - YX \in \mathcal{G}$.
(On pourra considérer $\exp(tX)Y\exp(-tX)$).

Dans ce qui suit, on pose $[X, Y] = XY - YX$, et on note $f_X : \mathcal{G} \to \mathcal{G}$ l'application linéaire donnée par : $f_X(Y) = [X, Y]$.

22. Démontrer que $\forall X, Y \in \mathcal{G}, \quad \forall t \in \mathbf{R}, \exp(tf_X)(Y) = \exp(tX)Y\exp(-tX)$.

23. On considère dans cette question $G = SU_2(\mathbf{C})$.

(a) Démontrer que $\mathcal{G}$ est un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension 3 dont les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$ forment une base.

(b) Exprimer les éléments $[A, B]$, $[B, C]$, $[C, A]$ en fonction de A, B et C.

(c) Soit $X = xA + yB + zC$, avec $x, y, z \in \mathbf{R}$, un élément de $\mathcal{G}$. Déterminer la matrice de l'application linéaire : $f_X : \mathcal{G} \to \mathcal{G}, Y \mapsto [X, Y]$, dans la base (A, B, C).

(d) Démontrer que l'application $x \mapsto \det(x)$ détermine une forme quadratique définie positive sur $\mathcal{G}$.

(e) Démontrer que l'action de G sur $\mathcal{G}$ introduite en 21. (a) détermine un morphisme de groupes surjectif de $SU_2(\mathbf{C})$ sur $SO_3(\mathbf{R})$.

(f) Ce morphisme est-il injectif ?

(g) Les groupes $SU_2(\mathbf{C})$ et $SO_3(\mathbf{R})$ sont-ils isomorphes ?

——— FIN DU SUJET ———